Μάθημα 6: Σάββατο 02/05/20

Παράδειγμα (ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$)

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από κατανομή $U(0,\theta)$, $\theta>0$.
Να προσδιοριστεί ο ΕΜΠ της παραμέτρου θ.

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο θετικότητας της κατανομής εξαρτάται από την παράμετρο θ και έτσι η μεγιστοποίηση της πιθανοφάνειας δεν μπορεί να επιτευχθεί με τον κλασσικό τρόπο, αλλά θα εκμεταλλευθεί την μονοτονία (ως προς θ) της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

Η σ.π.π της $U(0,\theta)$ είναι $f(x;\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & 0<x<\theta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

ή $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x)$

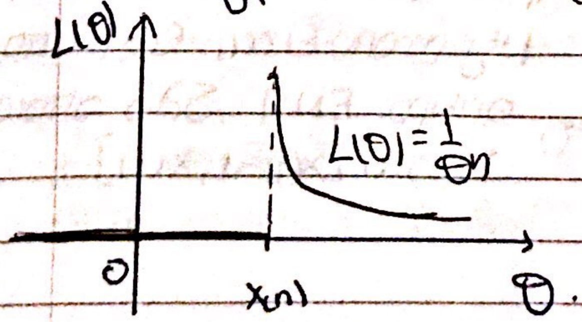
Η συνάρτηση πιθανοφάνειας γίνεται

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_i<\theta \ \forall i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & x_{(n)}<\theta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$\dfrac{d}{d\theta} L(\theta) = -\dfrac{n}{\theta^{n+1}} < 0$, για $x_{(n)}<\theta$ άρα $L(\theta)\downarrow$ για $\theta > x_{(n)}$

και η γραφική της παράσταση είναι:



Παρατηρούμε ότι η $L(\theta)$ μεγιστοποιείται για $\theta = X_{(n)}$

Άρα ο ΕΜΠ είναι $\hat{\theta} = X_{(n)}$ και ταυτίζεται με τον ΑΟΕΔ εκτιμητή της θ.

Παράδειγμα (ομοιόμορφη κατανομή $U(\theta, \theta+1)$)

Έστω τ.δ. $X_1, \dots X_n$ από $U[\theta, \theta+1]$. Να βρεθεί ο ΕΜΠ της θ.

Η κατανομή του πληθυσμού είναι $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta+1-\theta} = 1$ για $\theta \le x \le \theta+1$ και η συνάρτηση πιθανοφάνειας.

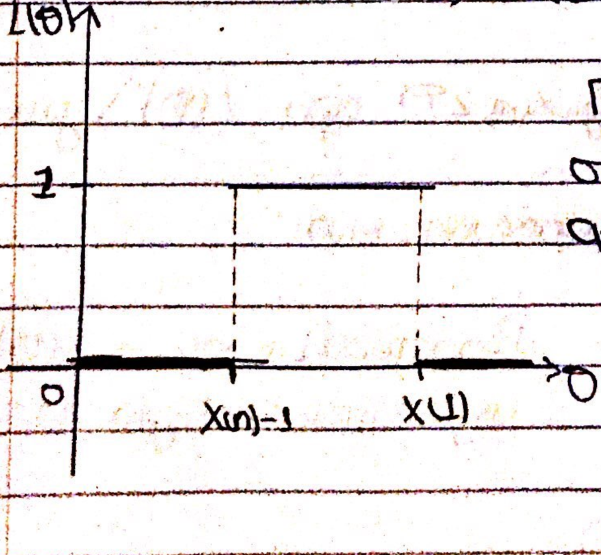
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} 1 \cdot I_{[\theta,\theta+1]}(x) = \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,\theta+1]}(x_i)$$

$$= \begin{cases} 1, & \theta \le x_i \le \theta+1, \ i=1,\dots n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αφού $\theta \le x_i \ \forall i=1..n$ θα είναι $\theta \le X_{(1)} = \min\{X_1, \dots X_n\}$

$x_i \le \theta+1 \ \forall i=1,\dots,n$ θα είναι $X_{(n)} \le \theta+1 \Rightarrow \theta \ge X_{(n)}-1$

Άρα $L(\theta) = \begin{cases} 1, & X_{(n)}-1 \le \theta \le X_{(1)} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



Παρατηρούμε ότι η $L(\theta)$ είναι σταθερή στο $[X_{(n)}-1, X_{(1)}]$ άρα $\forall \theta \in [X_{(n)}-1, X_{(1)}]$ η $L(\theta)$ μεγιστοποιείται. Έτσι υπάρχουν άπειροι ΕΜΠ, δηλ. οποιοδήποτε θ στο $[X_{(n)}-1, X_{(1)}]$

Επομένως $\hat{\theta} = X_{(n)}-1$ ή $\hat{\theta} = X_{(1)}$ ή ένας κυρτός συνδυασμός των άκρων $\hat{\theta} = \lambda(X_{(n)}-1) + (\lambda-1)X_{(1)}$, $0<\lambda<1$

Παράδειγμα (ομοιόμορφη κατανομή $U(\theta_1,\theta_2)$)

Έστω τ.δ $X_1,\dots,X_n$ από $U(\theta_1,\theta_2)$, $\theta_1<\theta_2$. Να προσδιοριστεί ο ΕΜΠ των παραμέτρων θ_1 και θ_2.

Η κατανομή που οδηγεί τα $X_1,\dots,X_n$ είναι
$f(x,\theta_1,\theta_2) = \dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}$, $\theta_1<x<\theta_2$ και ο παραμετρικός

χώρος $\Theta = \{(\theta_1,\theta_2) : \theta_1,\theta_2 \in \mathbb{R}, \theta_1<\theta_2\}$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας:

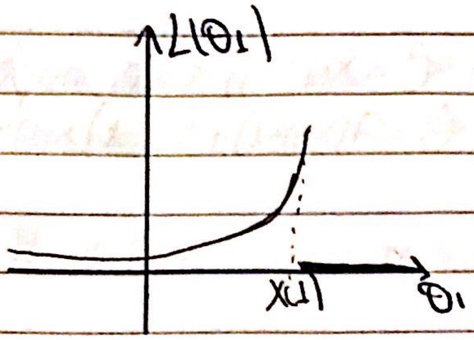
$$L(\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2-\theta_1} I_{(\theta_1,\theta_2)}(x_i)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1<x_i<\theta_2 \quad \forall i=1,\dots,n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1 \leq x_{(1)}, \ x_{(n)}<\theta_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αν η L θεωρηθεί ως συνάρτηση της θ_1, τότε

$$\frac{d}{d\theta_1} L(\theta_1,\theta_2) = \frac{n}{(\theta_2-\theta_1)^{n+1}} > 0$$ άρα $L(\theta)\nearrow$ ως προς θ_1 για $\theta_1 < x_{(1)}$

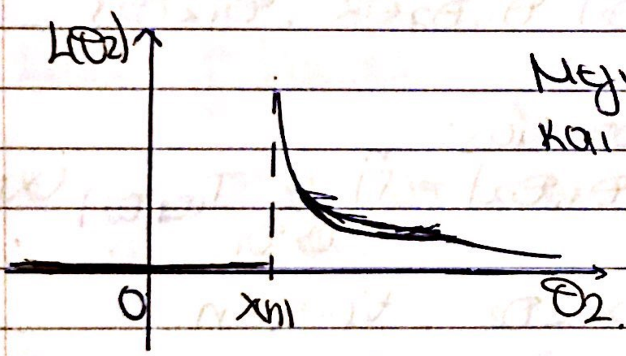


Μεγιστοποιείται για $\theta_1 = X_{(1)}$ και ο ΕΜΠ της θ_1 είναι $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$

Εντελώς ανάλογα, αν η L θεωρηθεί ως συνάρτηση της θ_2, τότε

$$\frac{d}{d\theta_2} L(\theta_1,\theta_2) = -\frac{n}{(\theta_2-\theta_1)^{n+1}} < 0$$

άρα $L \downarrow$ ως προς θ_2 για $\theta_2 > X_{(n)}$



Μεγιστοποιείται για $\theta_2 = X_{(n)}$ και ο ΕΜΠ της θ_2 είναι $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$.

Συγκεντρωτικά οι ΕΜΠ των παραμέτρων θ_1 και θ_2 είναι $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$ και $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$

Παράδειγμα (κατανομή Laplace)

Έστω τ.δ $X_{(1)},\dots,X_{(n)}$ από την κατανομή Laplace με σ.π.π $f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$. Να υπολογισθεί ο ΕΜΠ της $\theta \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

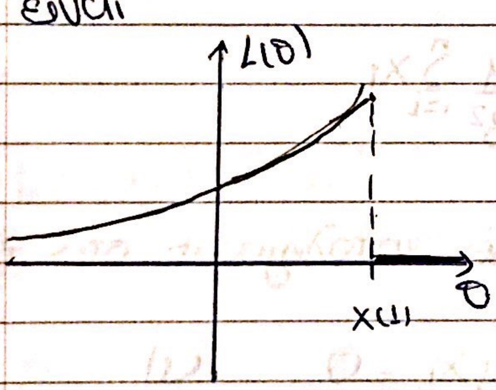
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x_i)$$

$$= \begin{cases} e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i}, & \theta \le x_i \quad \forall i=1,\dots,n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i}, & \theta \le x_{(1)} = \min\{x_1,\dots,x_n\} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta) = n e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i} > 0 \quad \forall \theta \le x_{(1)}$$

Άρα $L \nearrow$ για $\theta < x_{(1)}$ και η γραφική της παράσταση είναι



Μεγιστοποιείται για $\theta = x_{(1)}$
άρα $\hat{\theta} = x_{(1)} = \min\{x_1,\dots,x_n\}$

Παράδειγμα (Κατανομή Γάμμα)

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από την κατανομή $G(a,b)$
Να βρεθούν οι ΕΜΠ των a,b

Η κατανομή του πληθυσμού είναι
$$f(x,a,b) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/b}, \quad a,b>0, \ x>0$$

και ο παραμετρικός χώρος το πρώτο τεταρτημόριο
$\Theta = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, \ a,b>0\}$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

$$L(a,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, a, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} x_i^{a-1} e^{-x_i/\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta^{na}\Gamma^n(a)} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\log L(a,\beta) = -na\log\beta - n\log\Gamma(a) + a-1\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{d}{da}\log L(a,\beta) = -n\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - n\log\beta + \sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

$$\frac{d}{d\beta}\log L(a,\beta) = -\frac{na}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Εξισώνοντας με το μηδέν καταλήγουμε στις εξ. πιθανοφάνειας

$$-n\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - n\log\beta + \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0 \quad (1)$$

$$a\beta = \bar{x} \quad (2)$$

Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

$$-\frac{n\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - n\log\frac{\bar{x}}{a} + \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0 \quad (3)$$

$$\beta = \frac{\bar{x}}{a} \quad (4).$$

Scanned with CamScanner

Η (3) δεν μπορεί να λυθεί και να δώσει ΕΜΠ για την α σε κλειστή μορφή. Μπορεί να λυθεί όμως με αριθμητικές μεθόδους και να οδηγήσει σε ένα εκτιμητή $\hat{\alpha}$ τη α. Αν αυτός τοποθετηθεί στην (4) προκύπτει $\hat{\beta}=\bar{X}$. Αναφέρεται ότι το σύστημα των εξ. πιθανοφάνειας $\hat{\alpha}$ (1), (2) έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ ολικό μέγιστο της $L(\alpha,\beta)$

Άσκηση:

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό με κατανομή

$$f(x,\theta_1,\theta_2)=\frac{e^{-x}}{e^{-\theta_1}-e^{-\theta_2}}$$ για $\theta_1<x<\theta_2$ με θ_1,θ_2 άγνωστα

Να βρεθούν οι ΕΜΠ των θ_1,θ_2

Λύση:

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-x_i}}{e^{-\theta_1}-e^{-\theta_2}}=\frac{e^{-\sum x_i}}{(e^{-\theta_1}-e^{-\theta_2})^n},\ \theta_1<x_i<\theta_2\ \forall i$$

$$L(\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\sum x_i}}{(e^{-\theta_1}-e^{-\theta_2})^n}, & \theta_1<x_{(1)},\ x_{(n)}<\theta_2\\[2ex] 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$$\frac{dL(\theta_1,\theta_2)}{d\theta_1}=\frac{-e^{-\sum x_i}(-e^{-\theta_1})\cdot n(e^{-\theta_1}-e^{-\theta_2})^{n-1}}{(e^{-\theta_1}-e^{-\theta_2})^{2n}}=$$

$$=\frac{n\,e^{-(\theta_1+\sum x_i)}}{(e^{-\theta_1}-e^{-\theta_2})^{n+1}}$$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$\theta_1<\theta_2 \Rightarrow -\theta_1>-\theta_2 \Rightarrow e^{-\theta_1}>e^{-\theta_2}$ προκύπτει ότι

$\frac{dL(\theta_1,\theta_2)}{d\theta_1} > 0$ Άρα $L\uparrow$ ως προς θ_1 και $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$

Όμοια

$$\frac{dL(\theta_1,\theta_2)}{d\theta_2} = \frac{-e^{-\sum x} n(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2})^{n-1}(-\cancel{t}e^{-\theta_2})}{(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2})^{2n}} = \frac{-ne^{-(\theta_2+\sum x_i)}}{(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2})^{n+1}} < 0$$

Άρα $L\downarrow$ ως προς θ_2 και $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$

Ιδιότητες των εκτιμητών μέγιστης Πιθανοφάνειας

ΙΣ.1) Επάρκεια και ΕΜΠ

Ο ΕΜΠ είναι συνάρτηση του επαρκούς στατιστικού $T = T(\underline{X})$. Επειδή $T(\underline{X})$ επαρκές
$f(\underline{x},\theta) = g(T(\underline{x}),\theta)\,h(\underline{x})$ και $L(\theta) = f(\underline{x},\theta) = g(T(\underline{x}),\theta)\cdot h(\underline{x})$
άρα το θ που μεγιστοποιεί την L εξαρτάται και από το T

ΙΣ.2) Ένα-προς-ένα συνάρτηση του ΕΜΠ είναι ΕΜΠ.

Έστω $\hat{\theta}$ ο ΕΜΠ της θ και g είναι 1-1 συνάρτηση της θ.
Τότε $g(\hat{\theta})$ είναι ΕΜΠ της $g(\theta)$
Αν $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ οι ΕΜΠ των μ, σ^2 της $N(\mu,\sigma^2)$ κατανομής
Τότε $\hat{\mu} + \hat{\sigma}^2$ είναι ο ΕΜΠ της $\mu + \sigma^2$

ΙΣ3) ΕΜΠ και ΑΟΕΔ εκτιμητές

Κάτω από συνθήκες οι ΑΟΕΔ εκτιμητές που κατασκευάζονται μέσω της ανισότητας των Cramer - Rao είναι και ΕΜΠ

ΙΣ.4) ΕΜΠ και συνεπείς εκτιμητές

Κάτω από συνθήκες, όπως οι συνθήκες κανονικότητας, οι ΕΜΠ είναι συνεπείς εκτιμητές.

ΙΣ.5) Οι ΕΜΠ είναι ασυμπτωτικά κανονικοί

Κάτω από συνθήκες όπως και οι συνθήκες κανονικότητας και για μεγάλο μέγεθος δείγματος, $n \to \infty$ ο ΕΜΠ έχει κανονική κατανομή. Ειδικότερα αν $\hat{\theta}_n$ ο ΕΜΠ της θ τότε

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \to \infty]{L} N\left(0, \frac{1}{I_X(\theta)}\right)$$ με $I_X(\theta)$ το μέτρο πληροφορίας του Fisher

Μέθοδος των Ροπών:

Θεωρούμε ένα τ.δ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x, \underset{\sim}{\theta})$, $\underset{\sim}{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n$

Οι πληθυσμιακές (απλές) ροπές κ-τάξης ορίζονται $\mu_k = E(X^k)$, $k = 1, 2 ..$

Ενώ οι αντίστοιχες δειγματικές ροπές κ-τάξης είναι:

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad , k = 1, 2, ..$$

~~Οι δειγματικές~~

Ιδιότητες Δειγματικών ροπών:

ΙΣ.1) m_k, $k = 1, 2, ..$ αμερόληπτη της μ_k, $k = 1, 2, \ldots$

Πράγματι, $E(m_k) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) =$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int x_i^k f_{X_i}(x_i,\theta) dx_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_k = \frac{1}{n} n \mu_k = \mu_k, \ k=1,2,..$$

Ιδιότητα 2:

$m_k \xrightarrow{P} \mu_k \quad , k=1,2,..$ καθώς $n \to \infty$

Αφού $X_1,..,X_n$ είναι τ.δ το $X_1^k, X_2^k, .., X_n^k$ είναι επίσης τ.δ για $k=1,2,...$. Έτσι εφαρμόζοντας τον ασθενή νόμο των τυχαίων αριθμών

$$\frac{X_1^k + \quad + X_n^k}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} E(X_1^k) \quad , k=1,2..$$

Μέθοδος Ροπών:

Λόγω της ιδιότητας 2 για μεγάλο μέγεθος δείγματος n ισχύει $m_k \xrightarrow{P} \mu_k$ ή $m_k \simeq \mu_k$, $k=1,2,..$

Έτσι σε ένα 1º βήμα προσδιορίζουμε τις r-πρώτες πληθυσμιακές ροπές, αφού η $\underline{\theta}$ είναι r-διάστατη. Οι πληθυσμιακές ροπές θα εξαρτώνται από την παράμετρο $\underline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$ έτσι

$\mu_1(\theta_1, .., \theta_r) = E(X)$

$\mu_2(\theta_1, .. \theta_r) = E(X^2)$

$\vdots$

$\mu_r(\theta_1, .. \theta_r) = E(X^r)$

Στο **2º βήμα:** εξισώνουμε τις πληθυσμιακές ροπές με τις αντίστοιχες δειγματικές

$$\mu_1(\theta_1,\dots\theta_r) = m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\mu_2(\theta_1,\dots\theta_r) = m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\vdots$$

$$\mu_r(\theta_1,\dots,\theta_r) = m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

και λύνουμε το παραπάνω σύστημα r-εξισώσεων με r-αγνώστους ως προς $\theta_1,\dots\theta_r$.

Η λύση του συστήματος $\tilde{\theta}_1,\dots,\tilde{\theta}_r$ είναι εξ' ορισμού οι Εκτιμητές Μεθόδου Ροπών (ΕΜΡ) των παραμέτρων $\theta_1,\dots,\theta_r$

Παράδειγμα (Κανονική Κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$. Να προσδιορισθούν οι εκτιμητές των παραμέτρων μ και σ^2 με τη μέθοδο των ροπών

Η κανονική κατανομή είναι διπαραμετρική. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να κατασκευαστούν δύο εξισώσεις από την εξίσωση των δύο πρώτων πληθυσμιακών ροπών με τις αντίστοιχες δειγματικές ροπές δηλ

$$\mu_1 = m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \qquad (1)$$

$$\mu_2 = m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (2)$$

Scanned with CamScanner

αλλά $\mu_1 = E(X) = \mu$ (3) και $\mu_2 = E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2$.
ή $\mu_2 = \sigma^2 + \mu^2$ (4)

Απο (1), (2), ~~προκύπτει~~ (3), (4) προκύπτει

$$\mu = \bar{x} \quad \text{και} \quad \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Απο την επίλυση του συστήματος ως προς μ και σ^2 προκύπτουν

$$\tilde{\mu} = \bar{x} \quad \text{και} \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Συμπίπτουν με τους ΕΜΠ

Παράδειγμα Γάμμα:

Έστω τ.δ $X_1, \ldots X_n$ απο πληθυσμό με κατανομή γάμμα $G(a, b)$. Να προσδιοριστούν οι εκτιμητές των παραμέτρων a, b με την μέθοδο των ροπών.

$$\mu_1 = m_1 \Rightarrow E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow E(X) = \bar{x}$$

$$\mu_2 = m_2 \Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow Var(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\Rightarrow ab = \bar{x}$$

$$ab^2 + a^2b^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\Rightarrow \tilde{a} = \frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \tilde{b} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}}$$

Παρατηρούμε ότι οι εκτιμητές ροπών προσδιορίζονται σε κλειστή αναλυτική μορφή ενώ οι ΕΜΠ δεν υπολογίζονται σε κλειστή μορφή.

Παράδειγμα (ομοιόμορφη κατανομή)

Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$. Να προσδιορισθεί ο εκτιμητής ροπών της θ, $\theta > 0$

Ο ζητούμενος εκτιμητής προκύπτει από την λύση της

$$\mu_1 = m_1 \Rightarrow E(X) = \frac{\bar{X}}{2} \Rightarrow \frac{\theta + 0}{2} = \bar{X} \Rightarrow \theta = 2\bar{X}$$

δεν ταυτίζεται με το ΕΜΠ που είναι $X_{(n)}$ ούτε είναι συνάρτηση του επαρκούς στατιστικού $X_{(n)}$

Παρατήρηση:

Συγκριτικά με τους ΑΟΕΔ και τους ΕΜΠ θεωρούνται απλούστεροι. Χρησιμοποιούνται συνήθως ως "αρχικές λύσεις" των εξισώσεων πιθανοφάνειας σε περιπτώσεις που καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυσή της και επομένως στον αριθμητικό υπολογισμό των ΕΜΠ.